

LVIII олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии
МАТЕМАТИКА, ШКОЛЬНЫЙ ТУР

Таллинн, 24 ноября 2010 года
XII класс

Время, отводимое для решения: 4 часа.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Используются m водяных насосов. Известно, что, первый насос, работая один, может заполнить бассейн за 2 часа, второй насос за 4 часа, третий насос за 8 часов, и т.д., m -ый насос за 2^m часов.
 - a) Найди наименьшее количество насосов, которые при совместной работе заполнили бы бассейн менее чем за 1 час и 1 минуту.
 - b) Можно ли заполнить бассейн менее чем за час при использовании достаточного количества водяных насосов? Объясни.

2. На предприятии $2007 - 6n$ работников, которые поровну распределены между $2n + 1$ отделами. Сколько отделов на предприятии, если известно, что n является положительным целым числом и отделов на предприятии меньше 70.

3. Найди целые корни уравнения $\log_{\sqrt{x}}(x + 6) = 8 \log_{x+6} x$

4. Дана трапеция $ABCD$, у которой известны длины оснований $|AD| = 4$ и $|BC| = 1$, а также углы $\angle A = \arctan 3$ и $\angle D = \arctan 2$. Диагонали трапеции пересекаются в точке E . Найди точное значение площади треугольника CBE .

5. Эрик построил выпуклый 9-угольник. Он хочет записать в каждой вершине многоугольника одну цифру от 1 до 9 так, чтобы цифры, записанные в каждой вершине были различны, и сумма цифр, записанных в трёх последовательных вершинах, не превышала бы число N . Определи наименьшее возможное значение числа N .